Matematika Ekonomi

MATRIKS DAN SPL

TONI BAKHTIAR
INSTITUT PERTANIAN BOGOR

2012

Kesetimbangan Dua Pasar

- Permintaan kopi bergantung tidak hanya pada harganya tetapi juga pada harga teh (barang substitusi)
- Permintaan mobil bergantung pada harganya dan harga bensin (barang komplementer)
- Demikian juga dengan penawarannya.
- Model dua komoditas:

$$Q_1^D = a_1 + b_{11}P_1 + b_{12}P_2$$
$$Q_2^D = a_2 + b_{21}P_1 + b_{22}P_2$$
$$Q_1^S = \alpha_1 + \beta_{11}P_1 + \beta_{12}P_2$$
$$Q_2^S = \alpha_2 + \beta_{21}P_1 + \beta_{22}P_2$$

Kesetimbangan Dua Pasar

- Dalam kondisi kesetimbangan: $D = S$

$$(b_{11} - \beta_{11})P_1 + (b_{12} - \beta_{12})P_2 = \alpha_1 - a_1$$
$$(b_{21} - \beta_{21})P_1 + (b_{22} - \beta_{22})P_2 = \alpha_2 - a_2.$$

- Berapakah harga dan kuantitas kesetimbangan?

$$P_1^*, Q_1^*, P_2^*, Q_2^* \,?$$

- Dalam notasi matriks:

$$\begin{bmatrix} b_{11} - \beta_{11} & b_{12} - \beta_{12} \\ b_{21} - \beta_{21} & b_{22} - \beta_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 - a_1 \\ \alpha_2 - a_2 \end{bmatrix}.$$

MATRIKS

Definisi Matriks

- Matriks adalah kumpulan bilangan yang disusun dalam bentuk pesegi panjang atau bujursangkar. Ukuran atau ordo dari suatu matriks ditentukan oleh banyaknya baris dan kolom yang membentuknya.
- Notasi: huruf kapital A, B, C, ...
- Contoh:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- a_{ij} = elemen matriks A yang terletak pada baris ke-i, kolom ke-j
- $m \times n$ = ukuran atau ordo matriks A
- Matriks yang hanya memiliki satu baris/kolom disebut vektor baris/kolom.

Beberapa Bentuk Matriks

- **Matriks segi (*square matrix*):** Matriks yang banyaknya baris sama dengan banyaknya kolom. Elemen a_{11}, a_{22}, …, a_{nn} disebut elemen diagonal utama matriks A.
- **Matriks segitiga atas (*upper triangular matrix*):** Matriks segi yang semua elemen di bawah diagonal utamanya nol.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- **Matriks segitiga bawah (*lower triangular matrix*):** Matriks segi yang semua elemen di atas diagonal utamanya nol.

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 9 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- **Matriks Nol (*null matrix*):** Matriks yang semua elemennya nol.
- **Matriks identitas (*identity matrix*):** Matriks yang semua elemen diagonal utamanya bernilai satu dan elemen lainnya bernilai nol. Notasi: *I*.

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Operasi pada Matriks

Penjumlahan dan Pengurangan

- Penjumlahan dan pengurangan pada matriks terdefinisi jika matriks-matriks yang terlibat memiliki ukuran sama:

$$\begin{bmatrix} a & 1 \\ -3 & b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -c \\ -1 & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+4 & 1-c \\ -4 & b+x \end{bmatrix}.$$

- Operasi berikut tidak terdefinisi:

$$\begin{bmatrix} 0 & a \\ -2 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Operasi pada Matriks

Perkalian

- Perkalian skalar

$$-5\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5 & -10\\ -15 & -20\end{bmatrix},\quad k\begin{bmatrix}-3 & 2 & a\\ y & 6 & -c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3k & 2k & ak\\ yk & 6k & -ck\end{bmatrix}$$

- Perkalian matriks *AB* terdefinisi jika banyaknya kolom *A* sama dengan banyaknya baris *B*. Selain itu tidak terdefinisi.

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & 6 & 7\\ 8 & 9 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}21 & 24 & 7\\ 47 & 54 & 21\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}-1 & 2 & 1\\ 7 & 0 & -4\\ -2 & -3 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-a+2b+c\\ 7a-4c\\ -2a-3b+5c\end{bmatrix}$$

Operasi pada Matriks

- Sebuah perusahaan memproduksi 3 jenis output dan menggunakan 2 jenis input.
- Kuantitas output yang diproduksi Q dan harganya P diberikan sbb:

$$Q = \begin{bmatrix} 15000 \\ 27000 \\ 13000 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 10 & 12 & 5 \end{bmatrix}.$$

- Banyaknya input yang digunakan Z dan harganya W diberikan sbb:

$$Z = \begin{bmatrix} 11000 \\ 30000 \end{bmatrix}, \quad W = \begin{bmatrix} 20 & 8 \end{bmatrix}.$$

- Keuntungan

$$\begin{aligned} \pi &= PQ - WZ \\ &= \begin{bmatrix} 10 & 12 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15000 \\ 27000 \\ 13000 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 20 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11000 \\ 30000 \end{bmatrix} \\ &= 79000. \end{aligned}$$

Sifat-sifat Operasi pada Matriks

- **Hukum penjumlahan dan perkalian skalar**

Misalkan A, B dan C adalah matriks-matriks yang berukuran sama dan k_1, k_2 adalah skalar, maka

1. $(A + B) + C = A + (B + C)$
2. $A + (-A) = O$
3. $A + B = B + A$
4. $k_1 (A + B) = k_1 A + k_1 B$
5. $(k_1 + k_2) A = k_1 A + k_2 A$
6. $(k_1 k_2) A = k_1 (k_2 A)$
7. $0 A = O$

dengan O adalah matriks nol, yaitu matriks yang semua elemennya nol.

Sifat-sifat Operasi pada Matriks

- **Hukum perkalian matriks**

  Misalkan A, B dan C adalah matriks-matriks yang ukurannya sesuai sehingga perkalian matriks di bawah ini terdefinisi dan k adalah skalar, maka

  1. **Hukum Assosiatif**

     $(AB)\ C = A\ (BC)$

  2. **Hukum distributif kiri**

     $A\ (B + C) = AB + AC$

  3. **Hukum distributif kanan**

     $(B + C)\ A = BA + CA$

- **Catatan:** secara umum $AB \neq BA$.

Transpos Matriks

- Misalkan $A=(a_{ij})$ adalah matriks berukuran $m\times n$. Putaran atau transpos dari matriks A, ditulis A^T, adalah matriks berukuran $n\times m$ yang didefinisikan sebagai berikut:

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- **Sifat matriks transpos:**

1. $(A + B)^T = A^T + B^T$
2. $(A^T)^T = A$
3. $(k\,A)^T = k\,A^T$, untuk suatu skalar k
4. $(AB)^T = B^T A^T$

Transpos Matriks

- Sebuah perusahaan memproduksi 3 jenis output dan menggunakan 2 jenis input.
- Kuantitas output yang diproduksi Q dan harganya P diberikan sbb:

$$Q = \begin{bmatrix} 15000 \\ 27000 \\ 13000 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 10 \\ 12 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

- Banyaknya input yang digunakan Z dan harganya W diberikan sbb:

$$Z = \begin{bmatrix} 11000 \\ 30000 \end{bmatrix}, \quad W = \begin{bmatrix} 20 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

- Keuntungan

$$\begin{aligned} \pi &= P^T Q - W^T Z \\ &= \begin{bmatrix} 10 & 12 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15000 \\ 27000 \\ 13000 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 20 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11000 \\ 30000 \end{bmatrix} \\ &= 79000. \end{aligned}$$

Operasi Baris Dasar (OBD)

- Tukarkan baris ke-i dan ke-j. Notasi: E_{ij}
- Kalikan baris ke-i dengan suatu konstanta $k \neq 0$. Notasi: $E_{i(k)}$
- Tambahkan baris ke-i dengan k kali baris ke-j. Notasi: $E_{ij(k)}$
- Contoh: misalkan

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & y \end{bmatrix}$$

- Maka:

$$E_{12}(A) = E_{21}(A) = \begin{bmatrix} 3 & y \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, E_{2(-2)}(A) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -6 & -2y \end{bmatrix}, E_{12(3)}(A) = \begin{bmatrix} 10 & 2+3y \\ 3 & y \end{bmatrix}$$

Determinan Matriks

- **Determinan:** fungsi yang memetakan suatu matriks segi ke sebuah bilangan real.
- Notasi: det(A) atau $|A|$.
- Matriks berukuran 1×1: $A = (a)$, $|A| = a$.
- Matriks berukuran 2×2:

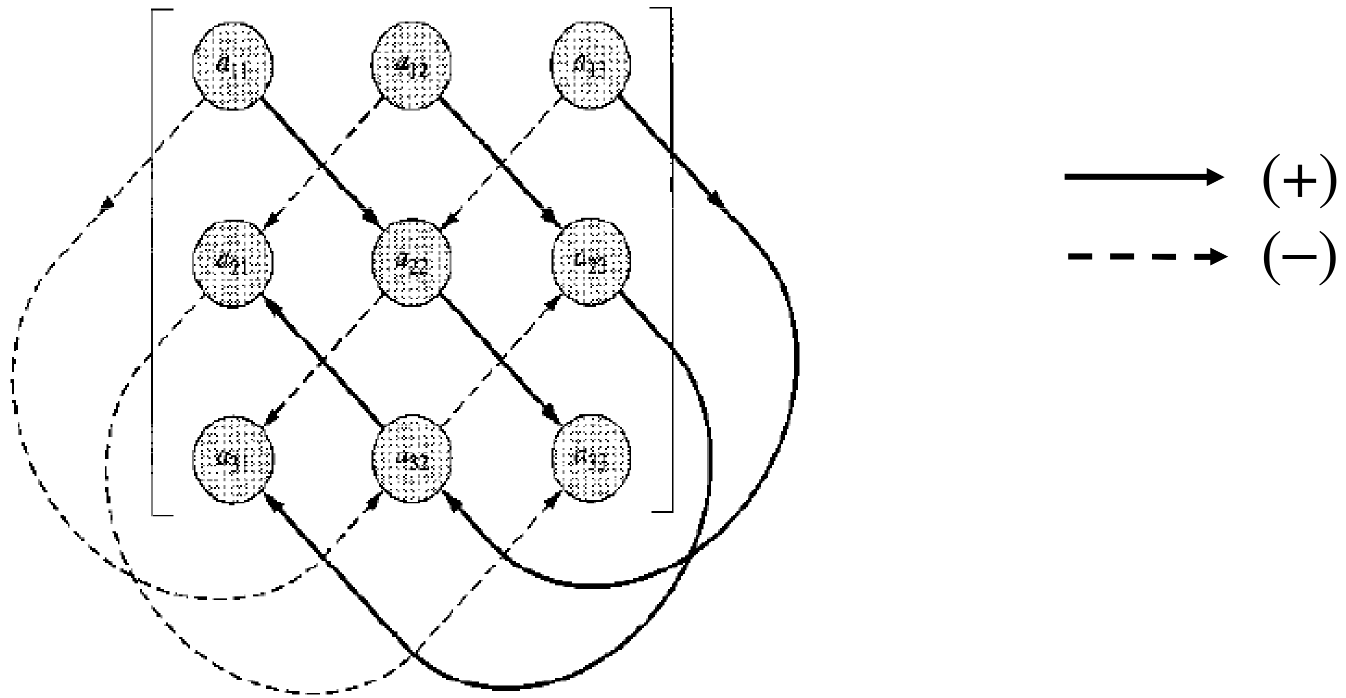
$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad |A| = ad - bc.$$

- Matriks berukuran 3×3:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, |A| = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{32}a_{23})$$

Metode Sarrus

- Named after Pierre Frederic Sarrus (1798 – 1861), matematikawan Prancis.
- Hanya berlaku untuk matriks berukuran 3 × 3.



$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23}$$

Metode Minor-Kofaktor

- Dapat digunakan menghitung determinan matriks segi berukuran berapa pun.
- Disebut juga metode penguraian Laplace (*Laplace expansion*).
- Misalkan $A = (a_{ij})_{n \times n}$ dan A_{ij} adalah anak matriks A yang diperoleh dengan menghilangkan baris ke-i dan kolom ke-j. Didefinisikan **minor** elemen a_{ij} , notasi M_{ij} adalah

$$M_{ij} = |A_{ij}|$$

dan **kofaktor** elemen a_{ij} , notasi c_{ij} , adalah

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} .$$

- Determinan matriks A ditentukan sbb:

1. $\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_{ij}$, untuk sebarang baris i
2. $\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} c_{ij}$, untuk sebarang kolom j.

Metode Minor-Kofaktor

- Hitung determinan matriks berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 2 \\ 1 & 5 & -1 \end{bmatrix}.$$

- Pilih baris ke-1
- Maka:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 2 \\ 1 & 5 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned} |A| &= a_{11}c_{11} + a_{12}c_{12} + a_{13}c_{13} \\ &= 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot 1 \cdot (-7) + 2 \cdot (-1) \cdot (-2) + 3 \cdot 1 \cdot 3 \\ &= -7 + 4 + 9 \\ &= 6. \end{aligned}$$

Metode Minor-Kofaktor

- Pilih baris ke-2:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 2 \\ 1 & 5 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned} |A| &= a_{21}c_{21} + a_{22}c_{22} + a_{23}c_{23} \\ &= 0 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} + (-3) \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \\ &= 0 + (-3) \cdot 1 \cdot (-4) + 2 \cdot (-1) \cdot 3 \\ &= 6. \end{aligned}$$

- Pilih kolom ke-1:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 2 \\ 1 & 5 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned} |A| &= a_{11}c_{11} + a_{21}c_{21} + a_{31}c_{31} \\ &= 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot 1 \cdot (-7) + 0 + 1 \cdot 1 \cdot 13 \\ &= 6. \end{aligned}$$

- **Hint:** Pilih baris/kolom yang banyak 0-nya.

Sifat-sifat Determinan

- Sifat-sifat determinan

1. $\det(A) = \det(A^T)$.
2. Jika dua baris/kolom matriks A saling dipertukarkan sehingga didapat matriks B, maka $\det(B) = -\det(A)$.

   Catatan: $\det(E_{ij}(A)) = -\det(A)$
3. Jika suatu baris/kolom matriks A digandakan dengan suatu skalar k sehingga didapat matriks B, maka $\det(B) = k \det(A)$

   Catatan: $\det(E_{i(k)}(A)) = k \det(A)$

   $\det(kA) = k^n \det(\mathrm{A})$, A matriks $n \times n$.
4. Jika suatu baris/kolom matriks A ditambah dengan k kali baris/kolom lainnya sehingga didapat matriks B, maka $\det(B) = \det(A)$.

   Catatan: $\det(E_{ij(k)}(A)) = \det(A)$

Sifat-sifat Determinan

5. Jika matriks A memiliki baris/kolom yang semua elemennya nol, maka $\det(A) = 0$.

6. Jika ada baris/kolom matriks A yang merupakan kelipatan dari baris/kolom yang lain, maka $\det(A) = 0$.

7. Jika A merupakan matriks segitiga atas atau matriks segitiga bawah, maka determinan matriks A adalah perkalian elemen-elemen diagonal utamanya.

8. $\det(AB) = \det(A).\det(B)$

Invers Matriks

- Misalkan A matriks segi berordo n. Matriks A dikatakan matriks taksingular atau mempunyai invers, jika terdapat matriks B sedemikian sehingga $AB = BA = I_n$. Matriks B disebut invers matriks A.
- Notasi: $B = A^{-1}$ (dibaca: invers matriks A)
- Untuk matriks berukuran 2×2:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

- Jika $|A| = 0$ maka A matriks singular, sehingga tidak memiliki invers.
- Sifat-sifat: Jika matriks A dan B adalah matriks-matriks taksingular, maka
  a. $(A^{-1})^{-1} = A$
  b. $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$
  c. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Metode Matriks Adjoin

- Misalkan $A = (a_{ij})$ adalah matriks segi berordo n. Jika $|A| \neq 0$ dan matriks $C = (c_{ij})$, dengan c_{ij} adalah kofaktor elemen a_{ij}, maka invers matriks A adalah

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} C^T.$$

- C^T disebut matriks adjoint dari matriks A, kadang ditulis adj(A).
- **Contoh:** tentukan invers matriks berikut dengan metode matriks adjoin

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Metode Matriks Adjoin

- Kofaktor:

$$c_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3,\ c_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1,\ c_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1,$$

$$c_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4,\ c_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2,\ c_{23} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$c_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -5,\ c_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1,\ c_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

- Matriks kofaktor dan matriks adjoin:

$$C = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 4 & -2 & 0 \\ -5 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C^T = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -5 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Metode Matriks Adjoin

- Determinan: pilih baris ke-2

$$|A| = 0(4) + 1(-2) + (-1)0 = -2.$$

- Invers:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}C^T = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & 4 & -5 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & -2 & \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Metode Eliminasi Gauss

- **Prosedur menentukan invers matriks** A

1. Tuliskan matriks yang diperbesar $(A|I_n)$.
2. Lakukan serangkaian operasi baris dasar (OBD) pada matriks $(A|I_n)$ sehingga bagian kiri matriks tersebut berubah menjadi I_n, yaitu $(I_n|P)$.
3. Tuliskan $A^{-1} = P$.

$$(A \mid I) = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] E \cdots E \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -2 & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{array}\right] = (I \mid A^{-1})$$

Sistem Persamaan Linear

SPL

Bentuk SPL

- Suatu persamaan dalam n variabel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dikatakan **linear** bila dapat dituliskan dalam bentuk

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n = k$$

di mana $c_1, c_2, \ldots, c_n$ dan k adalah konstanta-konstanta real.

- **Sistem persamaan linear (SPL)** yang terdiri dari m persamaan dan n variabel adalah suatu sistem persamaan yang dapat ditulis dalam bentuk

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

di mana a_{ij} dan b_{i} , $i = 1, 2, .., n$; $j = 1, 2, \ldots, m$ adalah konstanta real, sedangkan x_i, $i = 1, 2, .., n$ merupakan variabel.

SPL dalam Notasi Matriks

- SPL dalam notasi matriks:

$$AX = B \quad : \quad \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{B}$$

- SPL dalam notasi matriks diperbesar (*augmented matrix*):

$$(A \mid B) = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

- Jika $B = 0$ (vektor nol) maka SPL disebut **homogen**, jika tidak, **takhomogen**.

Solusi SPL

- Solusi SPL $AX = B$ yang terdiri dari m persamaan dan n variabel adalah pasangan n bilangan $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ yang memenuhi semua persamaan dalam SPL tersebut. Solusi $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ berkorespondensi secara berurutan dengan $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.
- Solusi SPL: **tunggal**, **banyak**, **tidak ada**.
- SPL yang memiliki solusi disebut **konsisten**, yang tidak **tak-konsisten**.
- SPL homogen selalu konsisten karena $X = 0$ selalu menjadi solusi dan disebut **solusi trivial**.

$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ x - y &= 3 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ x + y &= 3 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \text{tidak ada solusi}$$

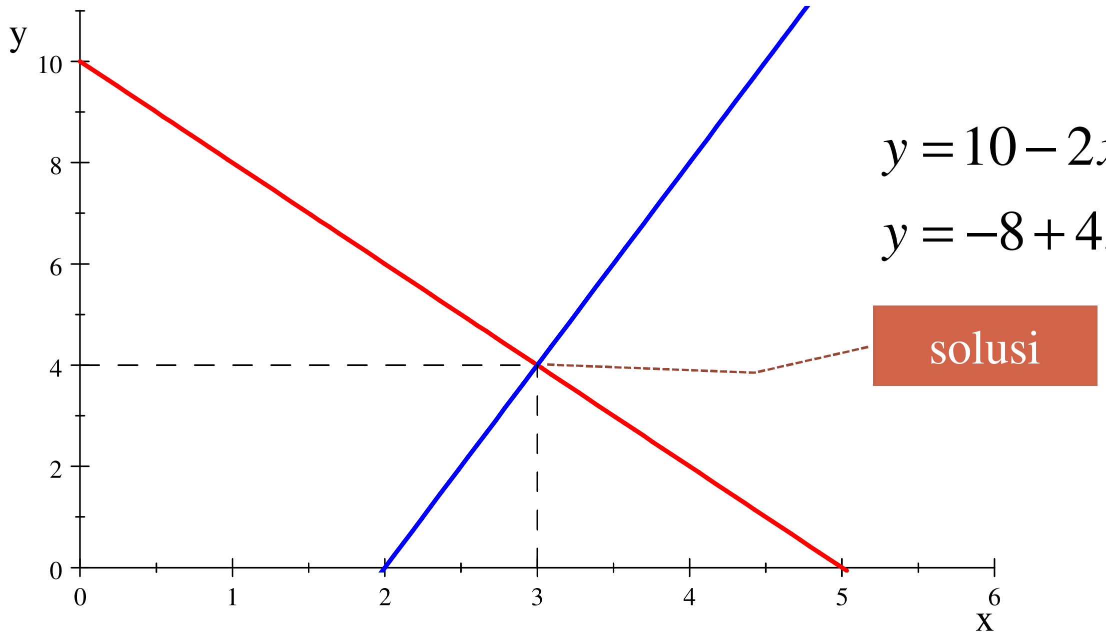
$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ 2x + 2y &= 2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ 1 - a \end{bmatrix}, a \in \mathbb{R}$$

Metode Grafik

- Hanya efektif untuk SPL 2-persamaan, 2-variabel.
- SPL:

$$2x + y = 10$$
$$-4x + y = -8$$

- Solusi:



$$y = 10 - 2x$$
$$y = -8 + 4x$$

Metode Substitusi

- Hanya efektif untuk SPL 2-persamaan, 2-variabel.
- SPL 3×3 masih memungkinkan
- SPL:

$$\begin{aligned} 2x + y &= 10 \\ -4x + y &= -8 \end{aligned}$$

Recommended for SPL 2× 2

- Tulis persamaan 1 menjadi $y = 10 - 2x$. Kemudian substitusikan ke persamaan 2 sehingga menjadi

$$\begin{aligned} & -4x + y = -8 \\ \Leftrightarrow \quad & -4x + (10 - 2x) = -8 \\ \Leftrightarrow \quad & -6x = -18 \\ \Leftrightarrow \quad & x = 3, \quad y = 4 \quad \text{(solusi)} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rl} 2x + y = 10 & \\ -4x + y = -8 & \\ \hline 6x \qquad = 18 & \rightarrow x = 3 \end{array} \; -$$

Metode Cramer

- Named after Gabriel Cramer (1704 – 1752), matematikawan Swiss.
- **Asumsi:** dalam SPL $AX = B$, $|A| \neq 0$.
- Solusi:

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|}.$$

A_i adalah matriks A yang kolom ke-i-nya diganti oleh vektor B.

- Bukti: lihat buku.
- Contoh:

$$\begin{aligned} 2x + y &= 10 \\ -4x + y &= -8 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -8 \end{bmatrix}$$

Solusi

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 10 & 1 \\ -8 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{18}{6} = 3, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 10 \\ -4 & -8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{24}{6} = 4.$$

- Untuk SPL besar, menghitung determinan adalah pekerjaan sendiri.

Metode Matriks Invers

- **Asumsi:** dalam SPL $AX = B$, $|A| \neq 0$ (A taksingular atau A memiliki invers).
- Solusi:

$$X = A^{-1}B.$$

- Untuk SPL besar, mencari invers matriks adalah pekerjaan sendiri.
- Contoh:

$$\begin{aligned} 2x + y &= 10 \\ -4x + y &= -8 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -8 \end{bmatrix}$$

Solusi

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 10 \\ -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Metode Eliminasi Gauss

- Disebut juga Metode Penghapusan
- Dapat mendeteksi apakah SPL konsisten ataukah tidak.
- Dapat mendeteksi apakah SPL bersolusi tunggal ataukah banyak.
- Contoh:

$$\begin{aligned} 2x + y &= 10 \\ -4x + y &= -8 \end{aligned}$$

- OBD terhadap matriks diperbesar:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 10 \\ -4 & 1 & -8 \end{array}\right] E_{21(2)} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 10 \\ 0 & 3 & 12 \end{array}\right] \begin{array}{c} E_{1(1/2)} \\ E_{2(1/3)} \end{array} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{2} & 5 \\ 0 & 1 & 4 \end{array}\right].$$

- Dari baris kedua matriks terakhir diperoleh $y = 4$.
- Dari baris pertama diperoleh $x + 0.5y = 5$, sehingga $x = 3$.

Metode Eliminasi Gauss

- SPL:

$$2x_1 + x_3 = 30$$
$$4x_2 + x_3 = 40$$
$$x_1 - x_2 + 4x_3 = 15$$

- OBD terhadap matriks diperbesar:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 30 \\ 0 & 4 & 1 & 40 \\ 1 & -1 & 4 & 15 \end{array}\right] \cdots \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 4 & 15 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & 10 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{40}{15} \end{array}\right].$$

- Matriks terakhir disebut **matriks eselon baris tereduksi** (*reduced row-echelon matrix*).
- Dari baris ke-3 diperoleh $x_3 = 40/15$.
- Dari baris ke-2 diperoleh $x_2 + 0.25x_3 = 10$, sehingga $x_2 = 140/15$.
- Dari baris ke-1 diperoleh $x_1 + 0.5x_3 = 15$, sehingga $x_1 = 205/15$.

Aplikasi Sehari-hari

- PT AGB akan mengadakan pelatihan komputer bagi para eksekutif. Untuk itu mereka memerlukan 7 buah komputer super dengan perincian 2 buah komputer berbasis Windows dan 5 komputer berbasis Linux. Pengadaan komputer akan dilakukan dengan membeli 3 komputer baru dan 4 sisanya cukup dengan menyewa. Harga beli komputer berbasis Windows adalah Rp30 juta per unit dan harga sewanya Rp20 juta per unit. Harga beli komputer berbasis Linux adalah Rp30 juta per unit dan harga sewanya Rp10 juta per unit. PT AGB memiliki anggaran sebesar Rp130 juta untuk keperluan ini. **Berapa banyak komputer Windows dan Linux yang harus dibeli dan disewa?**

Aplikasi Sehari-hari

Misalkan

x_1 : banyaknya komputer Windows yang disewa,

x_2 : banyaknya komputer Linux yang disewa,

x_3 : banyaknya komputer Windows yang dibeli,

x_4 : banyaknya komputer Linux yang dibeli.

	Windows	Linux	Total
Sewa	x_1	x_2	4
Beli	x_3	x_4	3
Total	2	5	

Sistem persamaan linear (SPL):

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 4 \\ x_3 + x_4 &= 3 \\ x_1 + x_3 &= 2 \\ x_2 + x_4 &= 5 \\ 20x_1 + 10x_2 + 30x_3 + 30x_4 &= 130 \end{aligned}$$

Operasi baris dasar terhadap matriks diperbesar

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 5 \\ 20 & 10 & 30 & 30 & 130 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Dengan substitusi mundur diperoleh $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Aplikasi: Kesetimbangan Dua Pasar

- Model:

$$\begin{bmatrix} b_{11}-\beta_{11} & b_{12}-\beta_{12} \\ b_{21}-\beta_{21} & b_{22}-\beta_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 - a_1 \\ \alpha_2 - a_2 \end{bmatrix}.$$

- Solusi (dengan Metode Cramer):

$$P_1^* = \frac{\begin{vmatrix} \alpha_1 - a_1 & b_{12}-\beta_{12} \\ \alpha_2 - a_2 & b_{22}-\beta_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_{11}-\beta_{11} & b_{12}-\beta_{12} \\ b_{21}-\beta_{21} & b_{22}-\beta_{22} \end{vmatrix}} = \frac{(\alpha_1 - a_1)(b_{22}-\beta_{22}) - (b_{12}-\beta_{12})(\alpha_2 - a_2)}{(b_{11}-\beta_{11})(b_{22}-\beta_{22}) - (b_{12}-\beta_{12})(b_{21}-\beta_{21})},$$

$$P_2^* = \frac{\begin{vmatrix} b_{11}-\beta_{11} & \alpha_1 - a_1 \\ b_{21}-\beta_{21} & \alpha_2 - a_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_{11}-\beta_{11} & b_{12}-\beta_{12} \\ b_{21}-\beta_{21} & b_{22}-\beta_{22} \end{vmatrix}} = \frac{(b_{11}-\beta_{11})(\alpha_2 - a_2) - (\alpha_1 - a_1)(b_{21}-\beta_{21})}{(b_{11}-\beta_{11})(b_{22}-\beta_{22}) - (b_{12}-\beta_{12})(b_{21}-\beta_{21})}.$$

Model Pendapatan Nasional

- Model pendapatan nasional:

$$Y = C + I_0 + G_0,$$
$$C = a + bY,$$

dengan

Y : pendapatan nasional (endogen)

C : pengeluaran untuk konsumsi (endogen)

I_0 : tingkat investasi (eksogen)

G_0 : belanja pemerintah (eksogen)

a : *autonomous consumption expenditure* ($a > 0$)

b : *marginal propensity to consume* ($0 < b < 1$)

- Tingkat kesetimbangan: Y^* dan C^*?

Model Pendapatan Nasional

- SPL dapat ditulis sbb:

$$Y - C = I_0 + G_0$$
$$-bY + C = a$$

- Dalam notasi matriks:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -b & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_0 + G_0 \\ a \end{bmatrix}.$$

- Solusi:

$$Y^* = \frac{I_0 + G_0 + a}{1 - b}, \quad C^* = \frac{b(I_0 + G_0) + a}{1 - b}.$$

Model IS-LM

- IS: *Investment-Saving*, LM: *Liquidity preference-Money supply*.
- Model IS-LM: model makroekonomi yang secara grafis menunjukkan hubungan antara suku bunga dan output riil di pasar barang dan di pasar uang.
- Persamaan di pasar barang:

$$Y = C + I + G$$
$$C = a + b(1 - t)Y$$
$$I = d - eR$$
$$G = G_0.$$

Variabel endogen: Y, C, I, R (suku bunga)
Variabel eksogen: G_0
Parameter: a, b, d, e, t

- Persamaan di pasar uang:

$$\text{Money demand}: \quad M_D = kY - lR$$
$$\text{Money supply}: \quad M_S = M_0$$
$$\text{Kesetimbangan}: \quad M_D = M_S.$$

Variabel endogen: Y, R
Variabel eksogen: M_0
Parameter: k, l

Model IS-LM

- SPL:

$$\begin{aligned} Y - C - I &= G_0 \\ b(1-t)Y - C &= -a \\ I + eR &= d \\ kY - lR &= M_0 \end{aligned}
\qquad
\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ b(1-t) & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & e \\ k & 0 & 0 & -l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ C \\ I \\ R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_0 \\ -a \\ d \\ M_0 \end{bmatrix}$$

- Ukuran SPL dapat direduksi:

$$Y = C + I + G \quad \Leftrightarrow \quad (1 - b(1-t))Y + eR = a + d + G_0$$

$$M_0 = kY - lR \quad \Leftrightarrow \quad kY - lR = M_0$$

$$\begin{bmatrix} 1 - b(1-t) & e \\ k & -l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + d + G_0 \\ M_0 \end{bmatrix}$$

Model Input-Output Leontief

- Model IO memandang perekonomian sebagai sejumlah sektor industri yang saling berinteraksi.
- Output suatu industri digunakan sebagai input industri yang lain (*intermediate good*) sekaligus konsumsi akhir (*final demand*).
- **Masalah:** menentukan tingkat produksi yang memenuhi permintaan industri dan konsumen.
- Misalkan x_i dan d_i (i = 1,2,...,n) adalah (nilai uang dari) tingkat produksi dan tingkat permintaan industri ke-i. Definisikan:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad x_i \geq 0, \quad D = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}, \quad d_i \geq 0.$$

Model Input-Output Leontief

- Misalkan a_{ij} (nilai uang dari) banyaknya barang industri ke-i yang diperlukan oleh sektor industri ke-j untuk memproduksi 1 unit barang. Definisikan

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

- Total output industri ke-i yang diperlukan oleh seluruh industri:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \cdots + a_{in} x_n.$$

- Total output seluruh industri:

$$AX = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Model Input-Output Leontief

- Dengan mempertimbangkan *final demand* sektor konsumsi:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + d_i.$$

- Atau

$$X = AX + D \quad \Leftrightarrow \quad (I - A)X = D \quad \Leftrightarrow \quad X = (I - A)^{-1} D.$$

Pangkat Matriks dan Kekonsistenan SPL *(optional)*

- Definisi: misalkan A matriks berordo $m \times n$. Pangkat atau *rank* matriks A, notasi $r(A)$, didefinisikan sebagai:
  - ordo terbesar **anak matriks** A yang determinannya tidak nol.
  - banyaknya baris/kolom A yang **bebas linear**.
  - banyaknya baris taknol pada **matriks eselon** A.
- Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 2 \\ 0 & -11 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{4}{11} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad r(A) = 2.$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad r(B) = 1.$$

Pangkat Matriks dan Kekonsistenan SPL *(optional)*

- Sistem persamaan linear $AX = B$, dengan A matriks berordo $m \times n$, konsisten jika dan hanya jika $r(A) = r(A|B)$. Jika SPL konsisten dan
  1. $r(A) = n$, maka SPL memiliki solusi **tunggal**.
  2. $r(A) < n$, maka SPL memiliki **takhingga banyak** solusi.
- Jika $r(A) \neq r(A|B)$ maka SPL tak-konsisten (tidak memiliki solusi).
- Contoh:

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 0 \\ \beta y + 4z &= 2 \\ \beta y + \beta^2 z &= \beta. \end{aligned}$$

Pangkat Matriks dan Kekonsistenan SPL *(optional)*

- OBD terhadap matriks diperbesar:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \beta & 4 & 2 \\ 0 & \beta & \beta^2 & \beta \end{array}\right) \overset{E_{32(-1)}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \beta & 4 & 2 \\ 0 & 0 & \beta^2 - 4 & \beta - 2 \end{array}\right)$$

- Misalkan $\beta = -2$ maka

$$(A \mid B) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right] \rightarrow \begin{array}{l} r(A) = 2 \\ r(A \mid B) = 3 \end{array} \rightarrow \text{SPL tak-konsisten.}$$

- Misalkan $\beta = 1$ maka

$$(A \mid B) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \end{array}\right] \rightarrow \begin{array}{l} r(A) = 3 \\ r(A \mid B) = 3 \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} \text{SPL punya} \\ \text{solusi tunggal.} \end{array}$$

Pangkat Matriks dan Kekonsistenan SPL *(optional)*

- Misalkan $\beta = 2$ maka

$$(A \mid B) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \begin{array}{l} r(A) = 2 < 3 \\ r(A \mid B) = 2 < 3 \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} \text{SPL punya} \\ \text{banyak solusi.} \end{array}$$